

FUNDAMENTOS FISICOS DE UN BALISTOCARDIOGRAFO DE ULTRA BAJA FRECUENCIA CON AMORTIGUACION COULOMBIANA

Physical basis of an ultra-low frequency ballistocardiograph with coulomb damping.

CARLOS PABST

*Instituto de Fisiología Normal y Patológica, Departamento de Ciencias,
Universidad de Chile, Valparaíso.*

Recibido para publicación el 28 de Junio de 1963

RESUMEN

Se estudian las características del funcionamiento de un balistocardiógrafo (bcg) de frecuencia natural ultra baja (0,15 c/s), con amortiguación por roce coulombiano. En vista que todos los bcg descritos hasta ahora utilizan una amortiguación viscosa, se presentan problemas teóricos que se estudian en forma analítica y analógica.

El análisis comprende dos grados de aproximación a la solución del problema.

Se verifican algunos de los resultados que se obtuvieron analíticamente utilizando un computador electrónico analógico, en el que se registra el "desplazamiento" estacionario del bcg cuando el sistema es excitado con distintas frecuencias.

INTRODUCCIÓN

En el transcurso de los últimos años se han diseñado y construido numerosos balistocardiógrafos (bcg), tanto de alta como de baja frecuencia, con el propósito de medir indirectamente los desplazamientos de la masa sanguínea durante la descarga sistólica, así como la velocidad y la aceleración que la actividad del corazón imprime a la masa corporal.

En el presente trabajo se estudian las características del funcionamiento de un bcg de ultra baja frecuencia, en el que se registra el desplazamiento cíclico de la mesa balistocardiográfica debido al movimiento de la masa del sujeto con respecto a su baricentro, producido a su vez por el desplazamiento de la sangre desde el ventrículo izquierdo hacia el sistema arterial (ley de acción y reacción y principio de d'Alembert). De este modo es teóricamente posible determinar —por un método indirecto— el volumen sistólico expulsado por el ventrículo izquierdo en el hombre en reposo, tal como lo han propuesto Klensch y Eger (1).

El presente trabajo se refiere en particular a un bcg de frecuencia natural igual a 0,15 ciclos por segundo (c/s), con la mesa suspendida según el modelo descrito por Henderson (2) en 1905. Además se ha ensayado por primera vez una amortiguación coulombiana (roce seco), que se diferencia fundamentalmente de la amortiguación viscosa utilizada en todos los bcg construidos hasta el momento.

Finalmente es interesante señalar que los resultados obtenidos acerca del bcg con el método analítico han sido comparados con aquellos encontrados simulando las características físicas del bcg en un computador análogo electrónico.

El comportamiento del bcg de frecuencia natural muy baja (igual a 0,15 c/s) será estudiado particularmente con el objeto de determinar la amplitud de la respuesta del bcg y el desfase que se produce entre el desplazamiento cíclico del baricentro y la mesa balistocardiográfica, cuando varía la frecuencia de la oscilación del baricentro.

El plan de trabajo comprende etapas de complejidad creciente del problema.

SE CONSIDERA QUE LA MASA CORPORAL Y LA MESA BALISTOCARDIOGRÁFICA ESTÁN UNIDAS RÍGIDAMENTE ENTRE SÍ

A continuación se utilizarán los siguientes símbolos:

- $x_c(t)$: desplazamiento del centro de gravedad del sujeto en estudio.
- $x(t)$: desplazamiento del bcg.
- m_b : masa de la mesa bcg.
- m_s : masa del sujeto.
- k_b : constante de acoplamiento elástico entre el bcg y el medio ambiente.
- $f(x)$: fuerzas de amortiguación por roce seco (coulombiano).

Se entiende por roce seco una fuerza disipativa cuyo sentido depende del signo de la velocidad de la masa que se mueve y cuyo valor absoluto permanece constante (Fig. 1), en tanto que con amortiguación viscosa dichas fuerzas son proporcionales a la velocidad de la masa. Se supone, además, que el centro de gravedad del sujeto se desplaza de acuerdo con una función periódica.

La ecuación diferencial que describe el movimiento del bcg se determina por la segunda ley de Newton y el principio d'Alembert:

$$(m_s+m_b)\ddot{x}+f(\dot{x})+k_b x=(m_s+m_b)\omega^2|x_c|\text{sen}\omega t \quad (1)$$

donde:

$x_c(t) = -|x_c| \text{sen}\omega t$, siendo ω la velocidad angular de excitación.

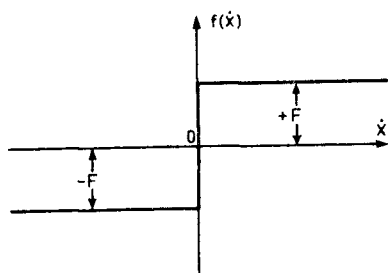


FIG. 1. Fuerzas de roce coulombiano o seco, en dependencia de la velocidad del móvil.

a) *Amplitud del movimiento de la mesa del bcg.*

La ecuación (1), debido a la amortiguación coulombiana, es no-lineal, de modo que para frecuencias muy bajas el movimiento puede ser periódico, pero no sinusoidal; en cambio con frecuencias de excitación elevadas, el movimiento es, según Den Hartog (3) y Jacobsen (4), prácticamente sinusoidal.

Es posible resolver la ecuación (1) en forma aproximada, utilizando un coeficiente de roce viscoso que sea equivalente al roce seco, de modo que la disipación de energía por ciclo sea igual en ambos sistemas de amortiguación. El coeficiente de roce viscoso equivalente (β_e) que se obtiene así no es una constante, sino que depende de ω y de la amplitud $|x|$ del movimiento de la mesa bcg. La expresión resultante para el coeficiente de roce equivalente es:

$$\beta_e = \frac{4F}{\pi\omega|x|} \quad (2)$$

donde F =valor absoluto de la fuerza de roce coulombiano.

Si se introduce el valor de β_e de la ecuación (2) en la ecuación (1), resulta:

$$m_1 \ddot{x} + \beta_e \dot{x} + k_b x = m_1 \omega^2 |x_c| \text{sen} \omega t$$

donde $m_1 = m_s + m_b$ (3)

y $\beta_e \dot{x}$ reemplaza a $f(\dot{x})$

En vista que primordialmente interesa el desplazamiento de la mesa en régimen estacionario (*steady-state*) y no en condiciones transitorias, se obtiene la siguiente expresión para la amplitud del desplazamiento del bcg:

$$|x| = \frac{\frac{m_1 \omega^2 |x_c|}{k_b} \left[1 - \left(\frac{4F}{\pi m_1 \omega^2 |x_c|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (4)$$

siendo: $\omega_n = 2\pi \cdot f_n$

f_n : frecuencia natural del bcg=0,15 c/s para nuestro bcg.

Después de algunas transformaciones se llega a la forma adimensional:

$$\frac{|x|}{|x_c|} = \frac{\left[\omega^4 - \left(\frac{4F}{\pi m_t |x_c|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (5)$$

La ecuación (5) —que define la razón entre la amplitud del desplazamiento de la mesa $|x|$ y el desplazamiento del baricentro corporal $|x_c|$ — es función de la frecuencia de excitación f , de la magnitud del roce seco (F), de la amplitud del desplazamiento del baricentro de la masa corporal $|x_c|$ y de la masa total m_t .

Se acepta que el desplazamiento máximo usual del baricentro de un individuo de $m_s=74$ Kg es $|x_c|=0,005$ cm; además, por construcción, $m_b=12$ Kg. F adoptará sucesivamente valores de 400, 500, 1000, 2000, 3000, 4000 y 5000 [dinas]. Reemplazando estos valores en la ecuación (5) se obtiene entonces una familia de curvas para $|x|/|x_c|=f(\omega)$, en las que F es el parámetro (Fig. 2).

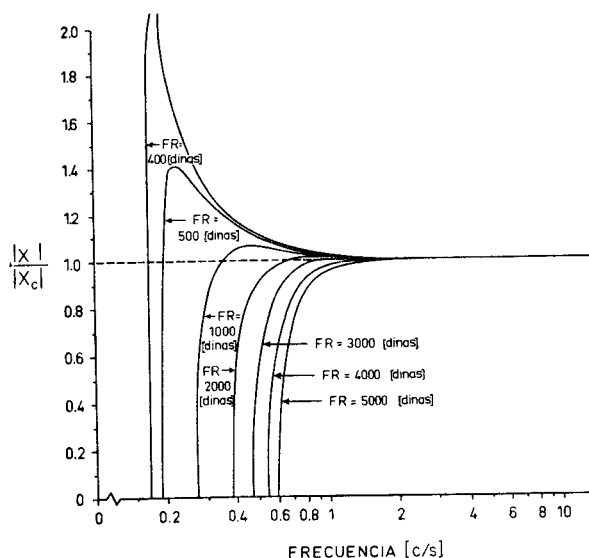


FIG. 2. Curvas características de amplitud-frecuencia, que indican cómo el desplazamiento del centro de gravedad del sujeto es representado por el desplazamiento de la mesa del bcg, con distintas fuerzas de amortiguación (F_R).

b) *Desfasaje entre la mesa del bcg y el baricentro del sujeto*

Además de las variaciones de amplitud del bcg es indispensable determinar el desfasaje entre el desplazamiento del bcg y el desplazamiento del baricentro.

Para una amortiguación viscosa el ángulo de desfasaje (α) en un sistema oscilante de un grado de libertad está dado por:

$$\alpha = \arctg \frac{2\gamma r}{1-r^2} \quad (6)$$

en que:

$$\gamma = \text{razón amortiguación} = \beta/\beta_{crit.}$$

β =coeficiente de amortiguación viscosa (real).

$\beta_{crit.}$ =coeficiente de amortiguación crítico= $2 \cdot (Km)^{\frac{1}{2}}$

$$r = \omega/\omega_n$$

Para roce seco es conveniente introducir de acuerdo con Myklestad (5) una razón γ_e que es análoga a la del roce viscoso. Si se considera de nuevo un $\beta_{crit.}=2(Km)^{\frac{1}{2}}$, resulta entonces que:

$$\gamma_e = \frac{\beta_e}{\beta_{crit.}} = \frac{4F}{\pi \omega |x|} \cdot \frac{1}{2(k_b \cdot m_t)^{\frac{1}{2}}} \quad (7)$$

Si se utiliza la relación general, válida para un sistema que puede oscilar con un grado de libertad, $\omega_n=[K_b/m_t]^{\frac{1}{2}}$, se llega después de algunas transformaciones a:

$$\gamma_e = \frac{2F}{\pi r k_b |x|} \quad (8)$$

Si se introducen (4) y (8) en la ecuación (6) resulta finalmente para α :

$$\alpha = \arctg \frac{1}{\left[\left(\frac{\omega^2}{\frac{4F}{\pi m_t |x_c|}} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

La ecuación (9) que, al igual que la ecuación (5), es función de ω , F , m_t , $|x_c|$, se encuentra representada en la Fig. 3, de modo que el ángulo de desfasaje aparece en función de la frecuencia de excitación f para las mismas condiciones analizadas anteriormente, siendo F el parámetro.

El estudio de las Fig. 2 y 3 revela, que la respuesta óptima del bcg se lograría con una fuerza de amortiguación $F=1.000$

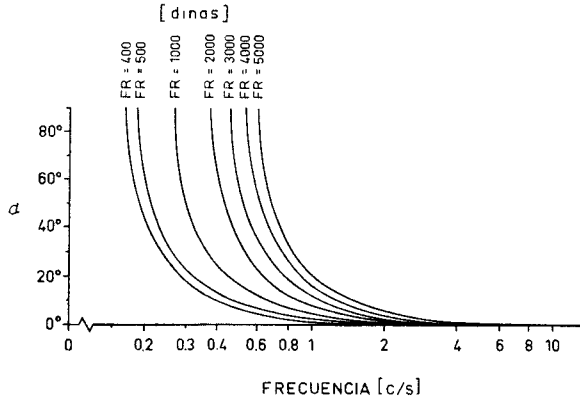


FIG. 3. Curvas de desfase entre el movimiento del bcg y el centro de gravedad del sujeto, con distintas fuerzas de amortiguación (F_R).

[dynas]. De acuerdo con Noordergraaf (6), la amplitud del desplazamiento debe ser prácticamente constante en el margen de frecuencias que interesa (entre 1 y 30 ciclos/seg), con una fluctuación no mayor del 25%; por otra parte el desfase no debe exceder a 15° . Estas condiciones se cumplen en el presente bcg a partir de una frecuencia de excitación de 0.5 ciclos/seg.

c) Simulación analógica del sistema con acoplamiento rígido.

A fin de comprobar la exactitud de la solución aproximada de la ecuación diferencial (1) se estudió por medio de un computador analógico electrónico (Donner, modelo 3000). El circuito cerrado que representa las características del sistema mesa-sujeto es excitado exteriormente por un voltaje de frecuencia variable, que simula el movimiento del centro de gravedad. La amortiguación de tipo coulombiano se simula a su vez mediante 2

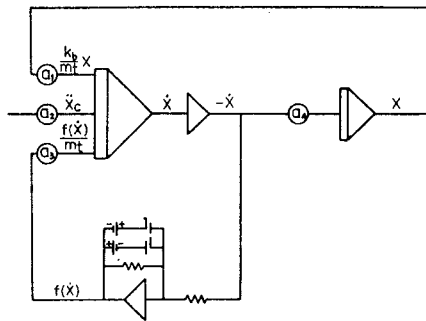


FIG. 4. Diagrama de programación para la solución analógica de la ecuación $m_t \ddot{x} + f(x) + k_b x = m_t \ddot{x}_c$. analógica de la ecuación $m_t \ddot{x} + f(x) + k_b x = m_t \ddot{x}_c$.

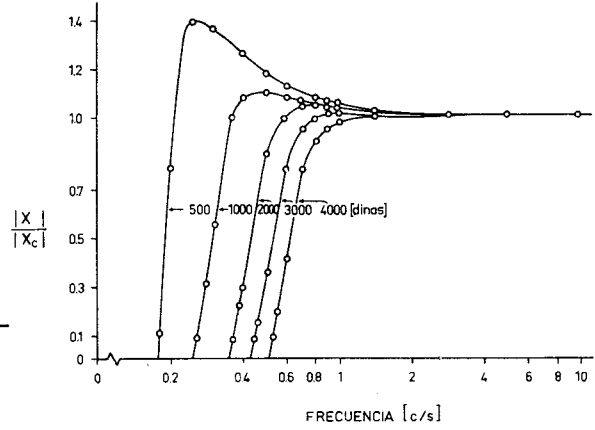


FIG. 5. Curvas de amplitud del movimiento del bcg en relación al movimiento del centro de gravedad del sujeto, obtenidas con el computador analógico.

diodos conectados a la realimentación de un amplificador operacional (Fig. 4). Los resultados obtenidos con el computador analógico se han representado en la Fig. 5, siendo F el parámetro, al igual que en la Fig. 2. La comparación de los resultados obtenidos analíticamente (Fig. 2) con los valores encontrados por medio del computador analógico (Fig. 5) revela que hay correspondencia muy satisfactoria para los distintos valores de F .

2) LA MESA DEL BCG Y EL SUJETO ESTÁN ACOPLADOS EN FORMA VISCOELÁSTICA

En la Fig. 6 se ha representado un sistema de dos masas acopladas viscoelásticamente, en que:

- m_s = masa del sujeto.
- $x_c(t)$ = desplazamiento del centro de gravedad del sujeto.
- $f_{int}(t)$ = fuerzas producidas por el desplazamiento del centro de gravedad del sujeto = $m \ddot{x}_c$.
- $x_s(t)$ = desplazamiento de un punto cualquiera de la masa del sujeto.
- k_s = coeficiente de acoplamiento
- β_s = coeficiente de amortiguación viscosa entre sujeto y bcg.
- m_b = masa del bcg.
- $x_b(t)$ = desplazamiento del bcg.
- k_b = constante de acoplamiento elástico entre bcg y ambiente.
- $f(x_b)$ = fuerza de amortiguación por roce coulombiano entre bcg y el ambiente.

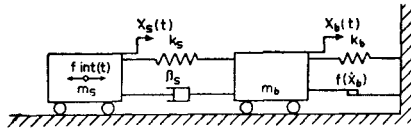


FIG. 6. Representación del conjunto sujeto-bcg, como sistema de dos masas acopladas viscoelásticamente.

Cuando al sistema representado en la Fig. 6 se aplica la segunda ley de Newton, resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left. \begin{aligned} m_s \ddot{x}_s + \beta_s(x_s - x_b) + k_s(x_s - x_b) &= m_s \ddot{x}_c \\ m_b \ddot{x}_b + f(\dot{x}_b) + k_b x_b + \beta_s(x_b - x_s) + k_s(x_b - x_s) &= 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

a) *amplitud y desfase de los movimientos del sujeto y del bcg.*

En las ecuaciones (10), salvo $f(x_b)$, los demás términos son lineales. Si se introduce ahora el coeficiente de roce viscoso equivalente al roce seco (coulombiano), tal como se propuso para la ecuación (2), se obtiene la "linearización" del sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} m_s \ddot{x}_s + \beta_s(x_s - x_b) + k_s(x_s - x_b) &= m_s \ddot{x}_c \\ m_b \ddot{x}_b + \beta_{e_b} \dot{x}_b + k_b x_b + \beta_s(x_b - x_s) + k_s(x_b - x_s) &= 0 \end{aligned} \right\} (11)$$

Se supone que el centro de gravedad del sujeto (baricentro) sigue una función periódica definida por:

$$x_c = |x_c| e^{j\omega t} \quad (12)$$

Si el sistema de ecuaciones (11) fuese realmente lineal, los desplazamientos estacionarios de la mesa y del sujeto también serían periódicos, con un desfase en relación a x_c , de modo que:

$$\left. \begin{aligned} x_s &= \bar{x}_s e^{j\omega t} \\ x_b &= \bar{x}_b e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} (13)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_s &= |x_s| e^{-j\alpha_s} \\ \bar{x}_b &= |x_b| e^{-j\alpha_b} \end{aligned} \right\} (14)$$

en que α_b y α_s representan los ángulos de desfase de x_s y x_b respecto a x_c .

La introducción de las expresiones (12) y (13) en las ecuaciones (11) da lugar a un nuevo sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} -\bar{x}_b [k_s + j\omega\beta_s] + \bar{x}_s [-m_s\omega^2 + j\omega\beta_s + k_s] &= -m_s |x_c| \omega^2 \\ \bar{x}_b [-m_b\omega^2 + j\omega\beta_{e_b} + j\omega\beta_s + k_s + k_b] - \bar{x}_s [k_s + j\omega\beta_s] &= 0 \end{aligned} \right\} (15)$$

Si se resuelve el sistema (15) para x_b y x_s resulta:

$$x_b = \frac{-(k_s + j\omega\beta_s) m_s \omega^2 |x_c|}{D} \quad (16a)$$

$$\bar{x}_s = \frac{-[k_b + k_s - m_b \omega^2 + j\omega(\beta_s + \beta_{e_b})] m_s \omega^2 |x_c|}{D} \quad (16b)$$

donde D representa el denominador que aparece en la fórmula (17).

El valor de \bar{x}_b , que aparece en la ecuación (16 a), representa una cantidad compleja para cada valor de ω , siendo su

valor absoluto igual a la amplitud de x_b . El ángulo de fase (α_b) se puede calcular por los métodos convencionales. Debido a que se ha introducido al valor del roce viscoso equivalente $\beta_{e_b} = 4 F / [\pi |x_b| \omega]$,

la expresión (16 a) para \bar{x}_b no resuelve explícitamente el problema, pues la incógnita x_b aparece en ambos miembros

$$\beta_{e_b} = 4F / [\pi |x_b| \omega]$$

de la ecuación. La amplitud de \bar{x}_b se define por la siguiente ecuación (18).

En vista de la complejidad algebraica de la ecuación (18) no es conveniente

despejar el valor de $|\bar{x}_b|$ directamente, sino que en cada caso particular es preferible introducir los valores numéricos. Del mismo modo, para obtener el desfase α_b del movimiento del bcg con respecto al movimiento del centro de gravedad es necesario conocer previamente el valor de $|x_b|$ en cada caso. El desfase α_b se obtiene de acuerdo a la siguiente relación:

$$\alpha_b = \arctg \frac{I}{R} \quad (19)$$

donde R e I representan respectivamente la parte real (\bar{R}) e imaginaria (I) de la ecuación (16 a).

Si en las ecuaciones (18) y (19) se introducen los datos de construcción y

$$D = m_b m_s \omega^4 - [k_b m_s + (m_b + m_s) k_s + \beta_s \beta_{eb}] \omega^2 + k_b k_s + j \omega (k_b \beta_s + k_s \beta_{eb} - [(m_b + m_s) \beta_s + m_s \beta_{eb}] \omega^2) \quad (17)$$

$$|\bar{x}_b|^2 = \frac{(k_s^2 + \omega^2 \beta_s^2) |x_c|^2 \omega^4}{[m_b \omega^4 - \omega^2 \{ (k_b + k_s) + \frac{m_b}{m_s} k_s \} - \omega \frac{\beta_s}{m_s \pi |\bar{x}_b|} + \frac{k_s}{m_s} k_b]^2 + [-\omega^3 \beta_s (1 + \frac{m_b}{m_s}) - \omega^2 \frac{4}{\pi |\bar{x}_b|} + \frac{k_s 4}{m_s \pi |\bar{x}_b|} + \omega \frac{\beta_s k_b}{m_s}]^2} \quad (18)$$

los valores obtenidos por Noordergraaf (6) mencionados a continuación, es posible calcular para distintos valores de ω

$$k_b = 65,5 \text{ [kg} \cdot \text{seg}^{-2}\text{]}, 70,8 \text{ [kg} \cdot \text{seg}^{-2}\text{]} \text{ y } 76,1 \text{ [kg} \cdot \text{seg}^{-2}\text{]}$$

el valor de $|\bar{x}_b|$ y α_b :

$$\beta_{eb} = \frac{4}{\pi} \frac{F}{\omega |\bar{x}_b|} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\omega |\bar{x}_b|} \text{ [Kg seg}^{-1}\text{]}$$

- $x_c = 0,005 \text{ cm.}$
- $m_s = 74 \text{ kg.}$
- $k_s = 3,7 \times 10^4 \text{ [g} \cdot \text{seg}^{-2}\text{].}$
- $\beta_s = 8 \times 10^2 \text{ [kg} \cdot \text{seg}^{-1}\text{].}$
- $m_b = 0 \text{ kg, } 6 \text{ kg y } 12 \text{ kg}$

$$F = 1000 \text{ [dinas]}$$

En la Fig. 7 se observa que la respues-

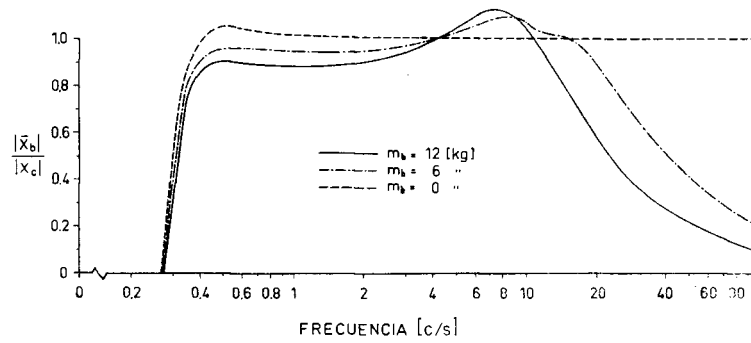


FIG. 7. Amplitud del desplazamiento del bcg en relación al desplazamiento del centro de gravedad del sujeto (bcg), para 3 distintas masas del bcg ($F = 1000$ dinas).

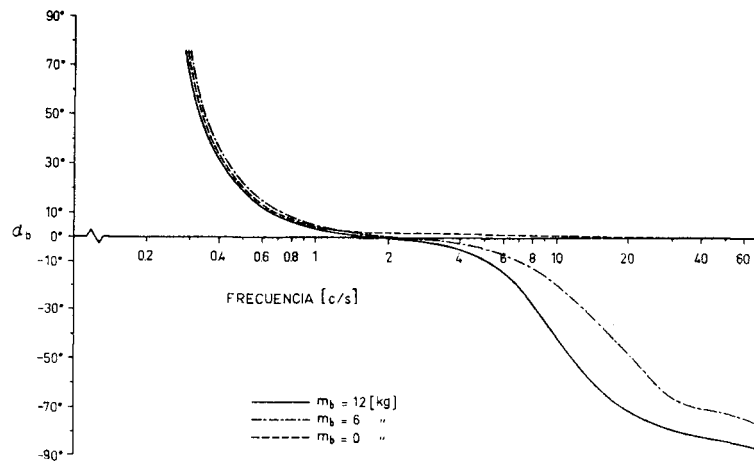


FIG. 8. Desfase del movimiento del bcg respecto al movimiento del centro de gravedad del sujeto, para 3 distintas masas del bcg ($F = 100$ dinas).

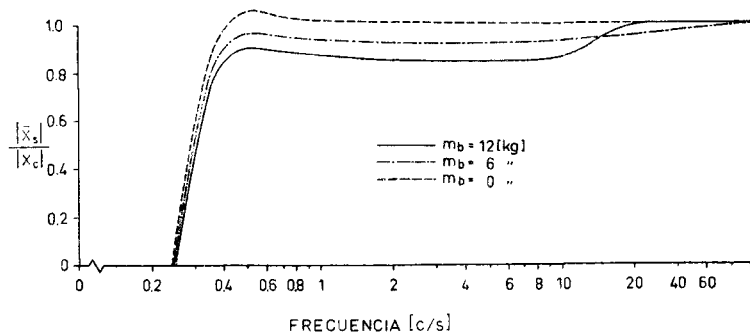


FIG. 9. Amplitud del desplazamiento del sujeto, en relación al desplazamiento del centro de gravedad, para 3 distintas masas del bcg ($F = 1000$ dinas).

ta del bcg sería casi perfecta para una masa (m_b) nula, por cuanto el cociente $|\bar{x}_s|/|\bar{x}_c|$ es prácticamente igual a la unidad a partir de 0,55 ciclos/s y hasta frecuencias superiores a 50 ciclos/seg. Para una masa de 12 kg, que es precisamente la masa del bcg construido por nosotros, la respuesta es adecuada a contar de 0,55 ciclos/seg. Si se acepta que en el bcg de desplazamiento interesan solamente las bajas frecuencias, la limitación que se observa para frecuencias más altas carece de significado práctico.

En cuanto al desfase (Fig. 8) se comprueba que para un límite de 15° de desfase, establecido por Noordergraaf (6) como adecuado, las respuestas son satisfactorias entre 0,55 ciclos/seg para una masa del bcg igual a 12 (kg).

Si en vez del desplazamiento (\bar{x}_b) de la mesa bcg, se calcula de acuerdo a la ecuación (16 b) el desplazamiento del sujeto (\bar{x}_s) en función de la frecuencia de excitación, se obtienen los resultados

que aparecen sintetizados en la Fig. (9); se ha representado el desfase correspondiente en la Fig. 10. Se constata en la Fig. 9, que el desplazamiento de la masa corporal (\bar{x}_s) y el desfase (α_s) cumplen con los requisitos establecidos por Noordergraaf (6) a partir de 0,5 ciclos/seg hasta frecuencias superiores a 30 ciclos/seg.

Si se comparan estos resultados obtenidos para el registro del desplazamiento del cuerpo del sujeto (\bar{x}_s) con aquellos correspondientes al desplazamiento (\bar{x}_b) de la mesa bcg, se comprueba que las diferencias en las respuestas son notorias cuando la frecuencia de excitación es superior a 10 ciclos/seg, en que sólo el registro directo sigue teniendo una respuesta adecuada.

b) Simulación analógica del sistema bcg-sujeto.

Si se utiliza el computador análogo para analizar la respuesta estacionaria del

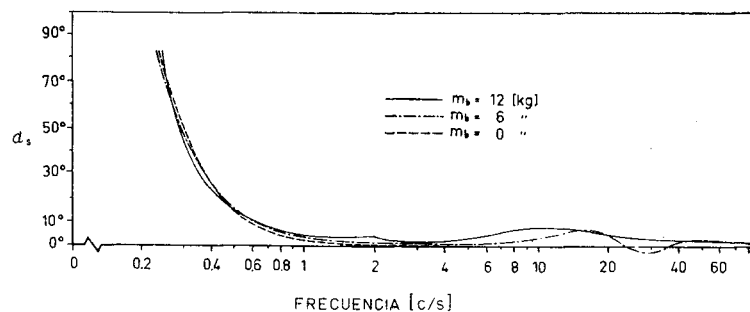


FIG. 10. Desfase del movimiento del sujeto respecto al movimiento del centro de gravedad, para 3 distintas masas del bcg ($F = 1000$ dinas).

bcg es posible hacer la comparación con los resultados obtenidos analíticamente para el desplazamiento de la mesa $|x_b|$. El diagrama de programación aparece en la Fig. 11. La computación se realizó para una masa (m_1) de 12 (kg), observándose en la Fig. 12 la respuesta del bcg para distintas frecuencias de excitación. Si se compara la curva experimental de la Fig. 12 con la correspondiente de la Fig. 7, se observa una correspondencia muy satisfactoria entre ambas, salvo pequeñas diferencias relativas en la magnitud de la respuesta.

SUMMARY

The present paper deals with the operational conditions of an ultra-low frequency ballistocardiograph (bcg), having a natural frequency of 0.15 cycles/sec, with Coulomb or frictional damping.

The Coulomb damping system differs, because of its discontinuous nature (Fig. 1), from the viscous damping, which is commonly used in Ballistocardiography. The theoretical problems derived from this new technique, were studied both from the analytical and the analogical point of view.

The present analysis was performed in two steps:

1) The bcg-subject system was primarily regarded as being a single degree of freedom system, thus assuming a rigid coupling between the bcg and the subject. Due to the periodicity of the systolic ejection, the subject's center of gravity, or rather the subject's mass around it,

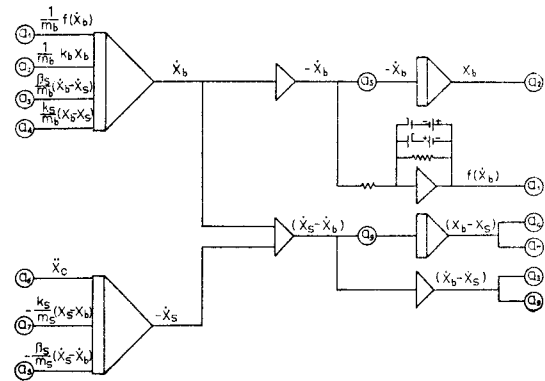


FIG. 11. Diagrama de programación para la solución analógica del sistema de ecuaciones diferenciales N° 10 ($F = 1000$ dinas, $m_1 = 12$ Kg).

moves according to an harmonic function of variable frequency. The application of d'Alembert's principle and Newton's second law leads to a second order differential equation (Eq. 1). The discontinuous nature of Coulomb damping could be simplified by the introduction of an equivalent viscous damping coefficient, as defined in (Eq. 2). By solving the "linearized" equation (Eq. 3) for steady-state conditions, it was possible to obtain the amplitude of the bcg displacements as a function of different parameters (Eq. 4 and 5).

After the introduction of an equivalent viscous damping ratio (Eq. 7), it was possible to study the phase-shift between the bcg and the movements of the center of gravity (Eq. 9). Furthermore, the results of equations 5 and 9 are shown in Fig. 2

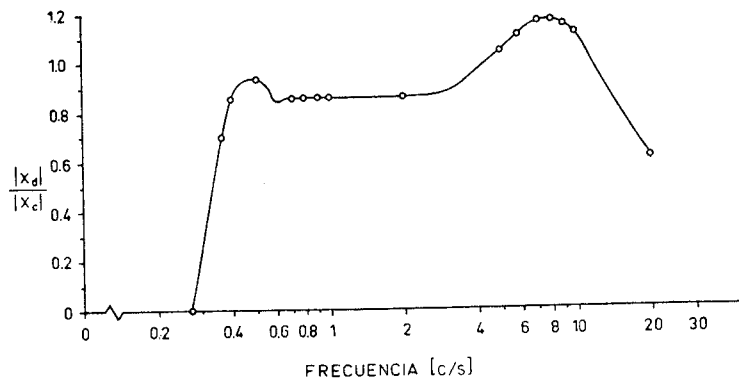


FIG. 12. Amplitud del desplazamiento del sujeto en relación al movimiento del centro de gravedad del sujeto ($m_1 = 12$ Kg, $F = 1000$ dinas), obtenida con el computador análogo.

and 3 for different Coulomb damping forces.

In order to verify the analytical study, the equation (1) was also solved by means of an analog computer. The computing diagram is shown in Fig. 4 and the results are represented in Fig. 5, revealing a remarkable similarity to those values shown in Fig. 2.

As a conclusion, the optimal Coulomb frictional damping force of 1000 dynes was chosen for the bcg constructed in our laboratory.

2) As a second approach, the bcg-subject system was regarded as having two degrees of freedom, i.e., a viscoelastic coupling between both masses was assumed (Fig. 6). By applying the same physical laws, the differential equation system (Eq. 10) relates the movements of bcg subject and baricenter. The introduction of an equivalent viscous damping coefficient into (Eq. 10), causes its "linearization" (Eq. 11). By using the complex amplitude method (Eq. 12, 13 and 14), the steady-state movements both of the subject and of the bcg were obtained (Eq. 16a and 16b). The absolute values of the movements amplitude is defined by (Eq. 18) and the phase-shift is determined by (Eq. 19). Fig. 7 and 8 represent the bcg displacement and the phase-shift for 3 different bcg masses. Finally, Fig. 9 and 10 show the subject's body displacements and the corresponding phase-shift.

Comparing Fig. 7 and 9, a gradual uncoupling of the subject and the bcg movements is clearly shown, when the frequencies are higher than 10 cycles/sec;

the uncoupling is increased by greater bcg masses. For this reason, it may be concluded that our bcg (12 kg mass) meets the standard requirements up to 7 cycles/sec, when the displacement of the bcg is recorded. If the recording is done directly on the subject, good results are obtained well over 30 cycles/sec.

Some of the analytical conclusion were checked by means of an analog computer, by simulating the system shown in Fig. 6 and recording the bcg "displacements" for a bcg mass of 12 kg. The computing diagram is shown in Fig. 11, and the steady-state displacement-frequency curve in Fig. 12. On comparing Fig. 12 with Fig. 7, for the same bcg mass, a close similarity between the two curves can be observed.

REFERENCIAS

- 1.— KLENSCH, H. y EGER, W. — *Pflugers Arch.*, **263**:459, 1956.
- 2.— HENDERSON, Y. — *Amer. J. Physiol.*, **14**: 287, 1905.
- 3.— DEN HARTOG, J. P. — *Mechanical Vibrations*. McGraw - Hill, New York, 1947. p. 427.
- 4.— JACOBSEN, L. S. — Steady forced vibration as influenced by damping. *Trans. Amer. Soc. Mech. Engin.*, 1930 (Paper APM-52 - 15, p. 169).
- 5.— MYKLESTAD, N. O. — *Fundamentals of Vibration Analysis*. McGraw - Hill, New York, 1956. (p. 252).
- 6.— NOORDERGRAAF, A. — *Physical Basis of Ballistocardiography*. (Thesis). Utrecht, 1956.