Nº 48 Arch. Biol. Med. Exper. 3:14-20, 1966

LEY DE SUPERFICIE. ANALISIS DIMENSIONAL Y GEOMETRICO DE LA ECUACION DE MEEH

Surface Law. Dimensional and geometric analysis of Meeh's Equation.

BRUNO GÜNTHER y BERNARDO LEÓN DE LA BARRA

Departamento de Ciencias, Universidad de Chile, Casilla 130-V, Valparaíso, Chile.

Recibido para publicación el 13 de Noviembre de 1965.

RESUMEN

Se acostumbra calcular la superficie corporal (S) de acuerdo con la clásica fórmula de Meeh, según la cual $S = kW^{2/3}$, siendo k un parámetro que varía según las especies y W el peso corporal. En el análisis dimensional de la ecuación de Meeh se han considerado tres alternativas de interpretación y se concluye que desde un punto de vista dimensional solamente es correcta la ecuación $S = kV^{2/3}$ en que la superficie (S) es una función del volumen del cuerpo (V). Se discute el significado geométrico del parámetro k, y se llega a la conclusión que k no es índice unívoco de la forma de un cuerpo (shape factor). Se compara de acuerdo con von Schelling la relación "superficie/volumen" de cuerpos esféricos, que obedecen estrictamente a la "ley de superficie", con la ecuación alométrica ($y = aW^b$) para el metabolismo básico de los homeotermos, concluyéndose que por razones geométricas el exponente alométrico (b) debe encontrarse en un margen ($0{,}72 < b < 0{,}74$) que difiere significativamente de la ley de superficie ($b = 0{,}66$). Para todo el reino animal el "margen empírico" del exponente alométrico (b) del metabolismo básico en función del peso corporal es $0{,}66 < b < 1{,}0$ el que prácticamente coincide con los límites teóricos predichos por la teoría de las similitudes biológicas ($0{,}66 < b < 1{,}16$).

INTRODUCCIÓN

En los estudios interespecíficos del metabolismo básico se acostumbra establecer una correlación entre la intensidad metabólica y alguna característica física de los organismos, como ser una longitud determinada, un área específica o una magnitud ponderal.

Se observó desde un principio que el metabolismo básico (kcal/hora) era en cierto modo proporcional al peso corporal; pero que si se expresaba por unidad de peso, se observaba una disminución a medida que aumentaba la masa corporal. Con el propósito de establecer un criterio uniforme, Sarrus y Rameaux (1) propusieron en 1839 expresar la producción de calor por unidad de superficie (kcal/hora/m^2). Por otra parte, en 1889 Richet (2) estableció la preponderancia del "área" corporal como un factor determinante de la intensidad metabólica. En 1883 formuló Rubner (3) la "ley de superficie" para uniformar el metabolismo básico en los estudios "intraespecíficos", concepto que ulteriormente pudo hacerse extensivo a los resultados obtenidos en mediciones "interespecíficas".

A fin de poder calcular la superficie corporal propuso Richet (2) considerar a los animales (conejos) como cuerpos esféricos, y que la densidad de ellos fuese la misma y de valor unitario ($M/V = 1{,}0$); de modo que a una masa corporal de 1 kg correspondía un volumen igual a un decímetro cúbico.

Según estos postulados, la superficie de cuerpos esféricos estaría dada por la ecuación $S = 4{,}84\ W^{2/3}$, expresándose la superficie (S) en dm^2 y el peso (W) en kg. En vista que el factor 4,84 sólo es válido para cuerpos esféricos, y considerando que los organismos por lo general distan mucho de tener esta forma geométrica, propuso en 1879 Meeh (4) una fórmula más general, en que el parámetro (k) era variable según la especie, de modo que:

$$S = kW^{2/3} \qquad (1)$$

Sin embargo, esta ecuación está incorrecta desde un punto de vista dimensional, como ya lo hiciera notar Kleiber (5), puesto que en el primer miembro aparece la dimensión superficie (L^2), en tanto que en el segundo figuran el parámetro k y la potencia 2/3 del peso corporal (W). Este último factor ($W^{2/3}$) equivale a la potencia 2/3 de una fuerza (MLT^{-2}), de lo que resulta finalmente que la dimensión de esta potencia del peso corporal es $M^{2/3} L^{2/3} T^{-4/3}$. En conclusión, esta última expresión dimensional carece evidentemente de significado físico, y difiere notoriamente de la dimensión del primer miembro (L^2). La única posibilidad de corregir esta falta de homogeneidad dimensional es suponer que el parámetro k tenga las dimensiones complementarias de $W^{2/3}$, es decir, $M^{-2/3} L^{4/3} T^{4/3}$.

Estos resultados ponen de manifiesto la inconsistencia dimensional de la ecuación *(1)* y la necesidad de encontrar una solución satisfactoria al problema.

ANÁLISIS DIMENSIONAL DE LA ECUACIÓN DE MEEH

A continuación se estudiarán tres soluciones alternativas del problema dimensional que se plantea a propósito de la clásica fórmula de Meeh.

Primera alternativa de interpretación dimensional.—A fin de obviar el inconveniente formal antes mencionado, se puede suponer que la dimensión superficie (L^2) esté presente simultáneamente en los factores (S) y (k); de esta manera, ambos miembros de la fórmula de Meeh llegarían a ser dimensionalmente homogéneos, siempre que el factor $W^{2/3}$ pueda ser considerado como un simple número. No obstante, este factor es una realidad física, ya que el peso corporal (W) es una fuerza cuya dimensión es MLT^{-2}.

Cuando se transforma la ecuación de Meeh en una expresión adimensional

$$S/k = W^{2/3} \qquad (2)$$

resulta que el cociente S/k es un número puro, ya que se aceptó por hipótesis, que tanto el numerador como el denominador fuesen superficies (L^2); de lo que se desprende que también la potencia 2/3 del peso corporal (W) tendría que ser simplemente un número.

De estos antecedentes se deduce, que la ecuación en que se basa la "ley de superficie" es dimensionalmente correcta si S y k representan superficies y W solamente el "valor numérico" del peso corporal, y no una magnitud vectorial. Sin embargo, el metabolismo básico (kcal/hora) se expresa comúnmente en relación con la superficie corporal efectiva (S), que se calcula a base del peso real del organismo en estudio (W). Por estos motivos no parece lícito soslayar el problema dimensional afirmando que el peso corporal es un número abstracto y no una realidad física.

Segunda alternativa de análisis dimensional.—En vista de que en la fórmula de Meeh se establece una correspondencia entre la superficie (S) y el peso corporal (W), se podría intentar expresar dicha superficie (S) en función de la masa (M) o del respectivo volumen (V), suponiendo siempre que el parámetro k carezca de dimensión.

Como se ha afirmado anteriormente, la expresión de S en función de W es dimensionalmente incorrecta, y también lo será si la superficie S se relaciona —a través de esta misma fórmula— con la masa corporal M, ya que en el primer caso resulta que $L^2 \neq (MLT^{-2})^{2/3}$ y en el segundo se obtiene que $L^2 \neq M^{2/3}$. En cambio, si se expresa la superficie (L^2) en función de la potencia 2/3 del volumen (L^3) del organismo respectivo, entonces se obtiene que $L^2 = (L^3)^{2/3}$, es decir, que en ambos miembros aparece la dimensión superficie (L^2). Por lo tanto, sólo en este último caso la expresión es lícita desde un punto de vista físico, y la formulación dimensionalmente correcta de la ecuación de Meeh sería la siguiente:

$$S = kV^{2/3} \qquad (3)$$

Tercera alternativa de interpretación dimensional.—Otra solución del problema dimensional podría consistir en eliminar las dimensiones físicas, tanto del peso corporal (W) como de la superficie respectiva (S), introduciendo la "razón" de peso y la "razón" de superficie, lo que se consigue utilizando las nociones de peso unitario (W_1) y de superficie unitaria (S_1) de un organismo "modelo". Resulta entonces, que la fórmula de Meeh para el "modelo unitario" sería la siguiente:

$$S_1 = kW_1^{2/3} \qquad (4)$$

de donde se desprende que

$$k = S_1/(W_1)^{2/3} \qquad (5)$$

Si se sustituye este valor de k en la ecuación original (ecuación *1*), aceptando además que este parámetro sea un factor constante y válido para todos los cuerpos, resulta que:

$$S = [S_1/(W_1)^{2/3}]W^{2/3} \qquad (6)$$

Al reordenar los términos de esta ecuación, con respecto a magnitudes homólogas, se llega a:

$$S/S_1 = (W/W_1)^{2/3} \qquad (7)$$

En esta ecuación, tanto las razones de superficie (S/S_1) y de peso (W/W_1) son simplemente números, y como tales carecen de dimensión física. De este modo es posible transferir el problema dimensional a la constante k, cuya dimensión ha sido determinada por la ecuación *(5)*. Es así como $[k] = L^2/(MLT^{-2})^{2/3}$, resultando finalmente que

$$[k] = (M^{-2}L^4T^4)^{1/3} \qquad (8)$$

El inconveniente que presenta esta tercera alternativa radica en que el valor numérico de la constante (k) depende del sistema de unidades de medida que se utilice en cada caso (cgs, MKS, sistema inglés, etc.), y en cambio la ventaja de este tratamiento consiste en que la razón de superficie (S/S_1) puede relacionarse indistintamente con la razón de peso (W/W_1), de masa (M/M_1) o de volumen (V/V_1).

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA CONSTANTE "k"

Algunos autores han definido a la constante k como "shape factor", es decir, como un factor que serviría para caracterizar la "forma" geométrica de un cuerpo.

Con el propósito de analizar esta aseveración, se ha elegido para este estudio un sólido de forma sencilla —como lo es

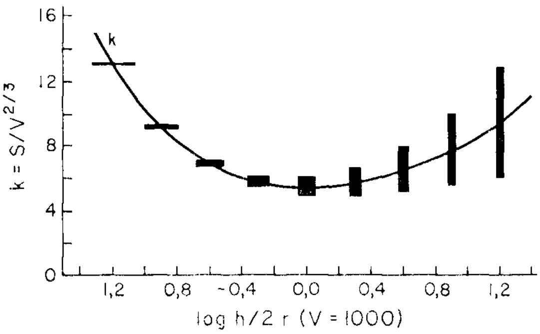

Fig. 1. Representación en escala semilogarítmica de la variación del parámetro k en función del logaritmo de la razón "altura/diámetro" de cilindros isojóricos.

el cilindro— poniendo como única condición, que el volumen de dicho cuerpo sea constante (V = 1000) y variando solamente las dimensiones longitudinales y transversales de este cuerpo geométrico.

En la Fig. 1 se han representado varios cuerpos cilíndricos, que sólo difieren entre sí en cuanto a la razón entre sus alturas (h) y sus diámetros basales (2r), resultando en cada caso valores diferentes de k. A medida que la razón h/2r aumenta, el cilindro adquiere una forma más alargada, y por el contrario, cuando la razón h/2r es menor que la unidad, los cuerpos cilíndricos se aplanan progresivamente. En la Fig. 1 se ve claramente que un mismo valor de k puede corresponder a cilindros de proporciones diferentes. Además es interesante hacer notar, que el valor de k pasa por un mínimo cuando en el cilindro se cumple la condición h = 2r, es decir, cuando el cilindro se asemeja en cierto modo a un cubo o a un cuerpo de forma esférica.

La relación entre el valor numérico del parámetro k y la forma geométrica (h/2r) en cilindros isojóricos —de volumen constante— se ha representado en escala semilogarítmica en la Fig. 2, en la cual las abscisas representan el logaritmo de la razón h/2r, y las ordenadas los valores de k. El margen de k que se ha encontrado en los mamíferos (6,3 - 12,3) corresponde a la variación de la razón de forma (h/2r) entre 3/1 y 35/1, siempre que se acepte que los cuerpos cilíndricos que se comparan sean simples y de igual volumen.

Para el hombre se ha encontrado, que el valor promedio de este parámetro es

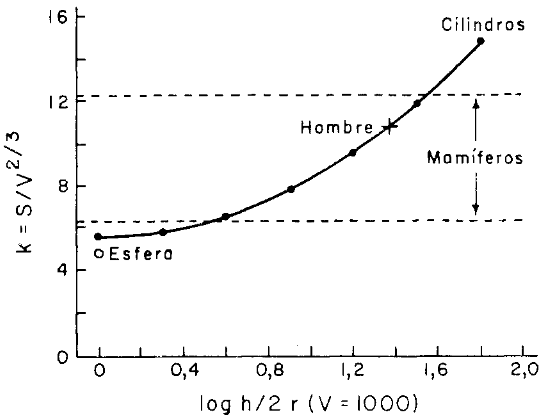

Fig. 2. Representación de las variaciones del parámetro k en relación con el logaritmo de la razón h/2r, con indicación de los cuerpos cilíndricos equivalentes en el margen de k correspondiente a los mamíferos y al hombre. El círculo blanco equivale al valor de k para cuerpos de forma esférica.

de 10,8, cifra que es equivalente al de un cilindro único y uniforme cuya razón (h/2r) sea de 24/1. Esta relación tan elevada para el hombre se puede atribuir a que, además de tronco, cabeza y extremidades, el cuerpo humano presenta numerosos cilindros pequeños y alargados (dedos y ortejos), así como varios apéndices (nariz, lóbulos auriculares, etc.), que constituyen estructuras de escaso volumen y de gran superficie relativa.

Es interesante mencionar a este propósito, que para el murciélago se ha encontrado un valor de k = 44,5, cifra que podría homologarse a la de un cuerpo cilíndrico exageradamente aplanado, cuya superficie relativa (S) fuese muy grande con respecto al volumen de la masa corporal (V), lo que concuerda con el enorme desarrollo de las alas en estos quirópteros.

DISCUSIÓN

Del análisis dimensional se desprende que de las tres alternativas estudiadas sólo en un caso se satisface el criterio dimensional comúnmente utilizado en física, a saber, aquella ecuación (3) en la cual la superficie (S) se expresa en función de la potencia 2/3 del volumen del cuerpo (V). En este caso el parámetro k es simplemente un número, que además es independiente del sistema de medidas utilizado.

Es interesante hacer notar, que en el trabajo original de Meeh (4) fue precisamente ésta la formulación que dicho autor propuso para calcular la superficie de cuerpos que difieren entre sí en cuanto a forma y tamaño. No obstante, este mismo autor recomendó utilizar el peso corporal (W) en vez del volumen (V) como variable independiente, a condición de que la densidad de los cuerpos sea la misma e igual a la unidad.

En conclusión, se puede afirmar que la ecuación de Meeh es dimensionalmente correcta sólo cuando la superficie (S) se relaciona con el volumen (V) del cuerpo respectivo, y que solamente por razones prácticas se ha extrapolado esta ecuación a la relación entre la superficie (S) y el peso corporal (W). Por estos motivos hay que tener siempre presente, que el peso del cuerpo solamente debe considerarse como un "índice numérico" del volumen (V), esto es, que el volumen (V) se determina "indirectamente" midiendo el peso corporal (W). La confusión dimensional no habría surgido si en la práctica hubiese sido más fácil determinar el volumen de un cuerpo que su peso respectivo. Sin embargo, estos reparos de orden teórico no han influido mayormente en la utilización práctica de la ecuación de Meeh, debido a que "numéricamente" existe una equivalencia entre la masa (M), el peso (W) y el volumen (V), siempre que se utilicen unidades técnicas (kg, g) para expresar el peso corporal.

En cuanto al posible significado geométrico, que algunos autores han atribuido a la constante k, vale la pena señalar, que ya Meeh calculó con gran precisión el valor numérico del parámetro k para una serie de cuerpos geométricos, a saber:

Esfera	=	4,836
Icosaedro regular	=	5,1484
Dodecaedro regular	=	5,3116
Cubo	=	6,000
Octaedro regular	=	7,1944
Tetraedro regular	=	7,2056

Si bien es cierto que cada cuerpo geométrico tiene un valor de k bien determinado, resulta sin embargo que un mismo valor de este parámetro, por ejemplo k = 6,1184, puede corresponder a cuerpos muy disímiles, como se desprende también de los datos proporcionados por Meeh (4) para tres cuerpos que poseen las siguientes características: un cilindro de radio 50 cm y de altura 40 cm; un cono de radio basal 50 cm y de altura 120 cm, y un cuerpo toroidal, cuyo radio generador sea de 22,2 cm, con una distancia entre el centro del círculo generador y el eje de rotación de 32,23 cm.

Es claro que en estos tres casos la constante k no puede ser considerada como un "índice numérico" de la forma, por cuanto estos cuerpos de características geométricas tan diversas poseen exactamente el mismo valor de k (6,1184).

Por otra parte, se desprende de la Fig. 1 que para un mismo cuerpo geométrico —el cilindro en el presente caso— los valores del parámetro (k) pueden ser los mismos aun cuando las razones h/2r sean completamente diferentes. Por esta razón no es posible considerar al parámetro k y como un índice unívoco de la forma geométrica (shape factor), aún cuando varíe al cambiar la forma o las proporciones de un cuerpo.

Como la ecuación de Meeh representa la expresión formal de la "ley de superficie", es oportuno analizar las implicaciones geométricas que von Schelling (6) destacara en su estudio sobre la homeotermia y la relación "área/volumen". Como valor de referencia utiliza von Schelling (6) las cifras correspondientes a un hombre normal de 70 kg de peso, cuya área corporal (A) equivale a 183 dm^2. Además él postula que dicho cuerpo tiene una densidad igual a la unidad (M/V = 1,0), de manera que su volumen resulta ser de V = 70 dm^3.

En la Fig. 3 se ha representado la relación entre log A y log V para cuerpos esféricos cuyas áreas se calculan de acuerdo con $A = 4{,}8359\,V^{2/3}$; y para los homeotermos, cuya área se determina en función de la intensidad metabólica ($A = 8{,}2325\,V^{0{,}73}$). En este último caso se calcula el valor de k = 8,2325, tomando en consideración que la superficie (183 dm^2) y el volumen (70 dm^3) corresponden al hombre; en tanto que el exponente (0,73) del volumen (V) ha sido encontrado empíricamente por Brody (7) para todos los mamíferos (desde el ratón al elefante).

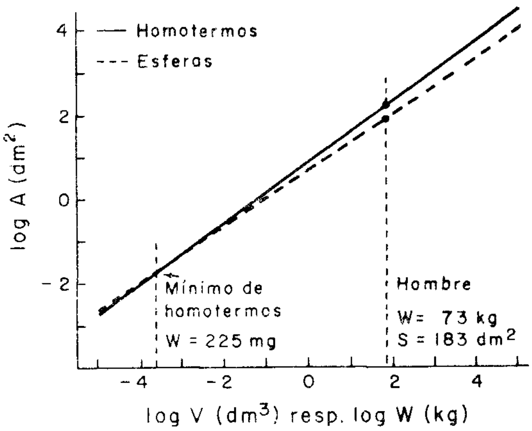

Fig. 3. Representación doblemente logarítmica del área (A) y el volumen (V) de cuerpos esféricos (log A = 0.684 + 0.667 log V), en comparación con la ecuación metabólica de los homeotermos (log A = 0.916 + 0.73 log V). La intersección de ambas rectas corresponde al peso mínimo (W) que puede tener teóricamente un animal homeotermo (adaptado de von Schelling, 6).

Las dos rectas de la Fig. 3 se intersectan en un punto, que como lo ha hecho notar von Schelling (6), corresponde al "mínimo absoluto" en cuanto a peso corporal de un homeotermo (W = 225 mg). Si se reemplazan los valores de A y de V en la ecuación válida para los homeotermos ($A = 8{,}2325\,V^{0{,}73}$) por las expresiones correspondientes para el área (A) y el volumen (V) de una esfera, resulta entonces que $4\pi r^2 = 8{,}2325\,(4/3\,\pi r^3)^{0{,}73}$, lo que implica un radio r = 0,03772 decímetros. Si la densidad es igual a la unidad, se obtiene un cuerpo cuyo peso es de 225 mg. Evidentemente este peso calculado para el homeotermo de tamaño mínimo está muy por debajo, como lo señala von Schelling (6), de las cifras encontradas para la musaraña (menos de 2 g) y para el colibrí (1,4 a 2,0 g), que son precisamente los homeotermos más pequeños que se conocen.

Con el propósito de ajustar el valor teórico (225 mg) a la realidad (> 1 g), se podría modificar la constante k o bien el exponente b. En vista de que la primera posibilidad no está en discusión, ensayó von Schelling (6) la modificación del exponente (b). De los cálculos realizados por este autor se desprende que con b = 0,72 el peso mínimo (W) de un homeotermo sería de 20 mg, cifra que está totalmente alejada de la realidad;

en cambio, con un exponente de 0,74 el peso mínimo llega a ser de 1,21 g, y con $b = 0,75$ esta cifra se eleva a 4,51 g. Este último valor sobrepasa el peso de la musaraña, y por lo tanto también debe descartarse. De lo anteriormente expuesto se desprende, que para los homeotermos el margen del exponente b estaría comprendido entre los límites siguientes: $0,72 < b < 0,74$. Esta conclusión de orden teórico está de acuerdo con los hallazgos experimentales de numerosos autores, que por medio del cálculo de regresión y en estudios interespecíficos, han encontrado que el exponente más adecuado para b es alrededor de 0,734. Es así como la ecuación empírica para el metabolismo básico de 10 grupos de mamíferos es según Brody (7) igual a $70,4\ W^{0,734}$. No obstante, Kleiber (5) ha insistido que también se encuentra una correlación satisfactoria si en vez del exponente 0,734 se utiliza 0,75, o sea la potencia 3/4 del peso corporal (W).

Conviene hacer notar que Zeuthen (8), Hemmingsen (9), Kayser y Heusner (10), entre otros, han calculado que no sólo el metabolismo básico de los mamíferos y de otros homeotermos, sino que también el de los poiquilotermos, el de los organismos unicelulares, y hasta el de las plantas, se puede representar en escala doblemente logarítmica por medio de una serie de rectas con coeficientes angulares que varían entre $b = 0,66$ (ley de superficie) y $b = 1,00$ (metabolismo directamente proporcional al peso corporal). Ni siquiera los animales hibernantes constituyen una excepción, como lo han demostrado Kayser y Heusner (10), por cuanto estos autores encontraron que el metabolismo básico (cal/24 horas) en 16 especies de animales hibernantes se rige en verano por la ecuación alométrica $Q = 63,6\ W^{0,62}$ y en invierno $Q = 2,09\ W^{0,69}$, siempre que en este último caso todos los valores encontrados se reduzcan a 10°C de temperatura corporal. Estos resultados revelan que durante el período de hibernación el metabolismo se reduce en 30 veces (63,6/2,09) y que a pesar de esto se conserva la correlación entre intensidad metabólica y el peso del cuerpo.

Por estos motivos la ecuación alométrica ($y = aW^b$), con un exponente b que oscila alrededor de 0,734 debería considerarse como el mejor índice para definir el metabolismo básico de los homeotermos en función del peso del cuerpo. Sin embargo, si se considera a todo el reino animal, el exponente b puede variar entre 0,66 y 1,00, incluyendo todos los valores intermedios, como lo ha afirmado von Bertalanffy (11), Hemmingsen (9), Kayser y Heusner (10); tal como también lo predice la teoría de las similitudes biológicas (Günther y Guerra, 12), que establece un rango para la intensidad metabólica —considerada como potencia— entre 0,66 y 1,16, siendo el valor promedio (0,734) el exponente que en la práctica se encuentra con mayor frecuencia.

SUMMARY

According to the so called "surface law", the basal metabolic rate is a function of the surface area of the body, which usually is calculated by means of Meeh's equation $S = kW^{2/3}$, where S = body area, k = parameter, W = body weight. It has been found that this equation is not homogeneous from a dimensional point of view.

Three alternative propositions can be made in order to solve the dimensional problem:

1) The dimension of surface (L^2) is assigned to the terms S and k, being $W^{2/3}$ a dimensionless number (Eq. 2).

2) Parameter (k) is a pure number, and the factor which multiplies has the dimension of a surface (L^2), as for instance the 2/3 power of the weight (W), the mass (M), or the volume (V) of a body, being the last alternative the only correct solution for the dimensional problem (Eq. 3).

3) It is also possible to introduce a surface ratio (S/S_1) and a weight ratio (W/W_1) according to model theories (Eq. 7); but unfortunately, the dimensions of parameter k are now meaningless from a physical point of view (Eq. 8).

Furthermore, the geometrical meaning of parameter k is analyzed, leading to the conclusion that k should not be considered as a "shape factor", because the same value for k can be found for solids of very different shapes, and conversely for the same geometrical form the values of k can vary considerably.

Finally, the "surface law" ($y = aW^{0,66}$) is analyzed from a geometrical point of view (von Schelling, 1954), and com-

pared with the empirical allometric equation ($y = aW^b$) with a range ($0,66 < b < 1,0$) for the relationship between the metabolic rate and body weight, as well as with the "range" defined by the theory of biological similarities ($0,66 < b < 1,16$).

REFERENCIAS

1.—SARRUS y RAMEAUX. — Bull. Acad. Roy. Méd. 3:1094, 1839.
2.—RICHET, C. — (Cit. Kleiber, 5).
3.—RUBNER, M. — (Cit. Kleiber, 5).
4.—MEEH, K. — Z. Biol. **15**:425, 1879.
5.—KLEIBER, M. — "The Fire of Life. An Introduction to Animal Energetics" New York, Wiley, 1961, p. 177.
6.—SCHELLING, H. VON. — Ann. N. Y. Acad. Sc. **56**:1143, 1954.
7.—BRODY, S. — "Bioenergetics and Growth, with Special References to the Efficiency Complex in Domestic Animals" New York, Reinhold, 1945.
8.—ZEUTHEN, E. — Quart. Rev. Biol. **28**:1, 1953.
9.—HEMMINGSEN, A. M. — "Energy Metabolism as Related to Body Size and Respiratory Surfaces and its Evolution" Rep. Steno Mem. Hosp. **9** (Part II). Copenhagen, 1960.
10.—KAYSER, C. y HEUSNER, A. — J. Physiol. París, **56**:489, 1964.
11.—BERTALANFFY, L. VON. — Theoretische Biologie. Band II. Stoffwechsel, Wachstum. Bern, Francke, 1951, p. 276.
12.—GÜNTHER, B. y GUERRA, E. — Acta physiol. lat.-amer. **5**:169, 1955.